Colles de Maths - semaine 2 - MP*1
Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Choses à retenir

- Bien comprendre le lien entre matrice et application linéaire et savoir basculer de l'un à l'autre, plutôt que de voir une matrice seulement en tant que telle
- La méthode de récurrence sur la dimension de l'espace
- Bien distinguer équivalence (problèmes de rang, valable aussi pour les matrices non carrés) et similitude (beaucoup plus fort, il faut souvent revenir au point de vue endomorphisme).

Exercice 1 (*) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension m et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A$.

Exercice 2 (*) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4, et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre 2. Soit $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base soit $\begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & C_2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (*) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non constante telle que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(AB) = f(A)\, f(B)$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

Exercice 4 (*) Déterminer le déterminant de l'application linéaire

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(K) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(K) \\ M & \longmapsto & {}^tM \end{array} \right. .$$

Exercice 5 (**) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M est de rang 1 si et seulement s'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $M = X^tY$.
2. Montrer que si M est de rang 1, $I_n + M$ est inversible si et seulement $\mathrm{Tr}(M) \neq -1$, et donner une expression de son inverse.

Exercice 6 (**) Soit $A \in \mathcal{M}_n(C)$ de trace nulle.
Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.
Pour les meilleurs : donner une condition sur K pour que le résultat soit encore vrai pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, et un contre-exemple sur un corps K ne vérifiant pas cette condition.

Exercice 7 (**) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$tr(A) = 0 \iff \exists B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ A = BC - CB.$$

Indication : Utiliser l'exercice précédent.
Pour les meilleurs : donner une condition sur K pour que le résultat soit encore vrai pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$.